

Prof. Dr. Rupert Frank
Leonard Wetzel

ANALYSIS EINER VARIABLEN
ÜBUNGSBLATT 8 - LÖSUNGEN

WS 2021/22
17. Dezember 2021

Aufgabe 1 (2 + 2 + 6 Punkte). Beweisen Sie folgende Aussagen:

- (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\ln x}}{e^x} = 0$,
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) = \ln x \quad \text{für } x > 0$,
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Hinweis: Zum Beweis dieser Aussage können Sie sich von der Herleitung des Grenzwerts

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

und der dazugehörigen Restgliedabschätzung aus der Vorlesung inspirieren lassen.

Lösung. (i) Für alle $x > 0$ ist

$$\frac{x^{\ln x}}{e^x} = e^{\ln^2 x - x}.$$

Es reicht also zu zeigen, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln^2 x - x) = -\infty$. Eine Umformung liefert

$$\ln^2 x - x = x \left(\left(\frac{\ln x}{x^{1/2}} \right)^2 - 1 \right). \quad (1)$$

Sei nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge positiver Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^{1/2}} = 0,$$

also insbesondere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_n}{x_n^{1/2}} = 0.$$

Sei $K > 0$ beliebig. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass für alle $n \geq N$ gilt

$$\frac{\ln x_n}{x_n^{1/2}} \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad x_n \geq \frac{4}{3}K.$$

Dann folgt mit (1) für alle $n \geq N$, dass

$$\ln^2 x_n - x_n = x_n \left(\left(\frac{\ln x_n}{x_n^{1/2}} \right)^2 - 1 \right) \leq x_n \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = -\frac{3}{4} x_n \leq -\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} K = -K,$$

was $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln^2 x - x) = -\infty$ zeigt und den Beweis abschließt.

(ii) Wir formen zunächst um:

$$n(\sqrt[n]{x} - 1) = \frac{e^{\frac{\ln x}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Sei $u \in \mathbb{R}$ mit $e^u = x$ (existiert, da $x > 0$ und die Exponentialfunktion surjektiv ist). Dann ist obiger Ausdruck gleich

$$\frac{e^{\frac{u}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = u \frac{e^{\frac{u}{n}} - 1}{\frac{u}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u = \ln x.$$

Dabei folgt die Konvergenz aus dem aus der Vorlesung bekannten Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

(iii) Für beliebiges $0 < x < 1$ schreibe $e^x = 1 + x + x^2/2 + R_3(x)$, wobei

$$R_3(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Wegen $0 < x < 1$ ist $x^n \leq x^3$ für alle $n \geq 3$, also folgt

$$R_3(x) \leq x^3 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq e \cdot x^3.$$

Weiter ist

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{x^2/2 + R_3(x)}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{R_3(x)}{x^2}.$$

Der zweite Summand konvergiert gegen 0, denn mit der vorherigen Abschätzung haben wir

$$0 \leq \frac{R_3(x)}{x^2} \leq \frac{e \cdot x^3}{x^2} = e \cdot x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Wir schließen $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1 - x)/x^2 = 1/2$, wie gewünscht. □

Aufgabe 2 (jeweils 2 Punkte). Berechnen Sie jeweils den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag der folgenden komplexen Zahlen:

$$(i) \frac{2}{1-i\sqrt{3}}, \quad (ii) \frac{(1-i)^2}{1+i}, \quad (iii) (1-i)^4,$$

$$(iv) \frac{1}{1+i} + \frac{2}{1-i}, \quad (v) \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^k \text{ für } k \in \mathbb{Z}.$$

Lösung. Es bezeichne z immer die komplexe Zahl aus der jeweiligen Teilaufgabe.

(i)

$$\frac{2}{1-i\sqrt{3}} = \frac{2(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})} = \frac{2+i \cdot 2\sqrt{3}}{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Also

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1.$$

(ii)

$$\frac{(1-i)^2}{1+i} = \frac{(1-i)^3}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i(1-i)}{2} = -i-1.$$

Also

$$\operatorname{Re} z = -1, \quad \operatorname{Im} z = -1, \quad |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

(iii)

$$(1-i)^2 = -2i, \quad (1-i)^4 = (-2i)^2 = -4.$$

Also

$$\operatorname{Re} z = -4, \quad \operatorname{Im} z = 0, \quad |z| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4.$$

(iv)

$$\frac{1}{1+i} + \frac{2}{1-i} = \frac{1-i+2(1+i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3+i}{2} = \frac{3}{2} + i\frac{1}{2}.$$

Also

$$\operatorname{Re} z = \frac{3}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2}, \quad |z| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

(v)

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i,$$

also

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^k = i^k = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 4n \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}, \\ i & \text{falls } k = 4n + 1 \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}, \\ -1 & \text{falls } k = 4n + 2 \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}, \\ -i & \text{falls } k = 4n + 3 \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Real- und Imaginärteil liest man sofort anhand des jeweiligen k s ab und $|z| = 1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. $\square$